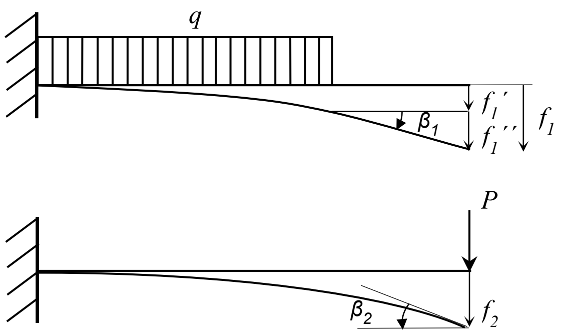
Problème1

1. Schéma décomposé des cas de charge



2. Flèche à l'extrémité de la poutre pour chaque cas (sur la base de l'annexe)

   Pour la charge répartie on a

$$f_1 = f_1{}' + f_1{}'' = f_1{}' + \beta_1 \cdot b = \frac{qa^4}{8EI} + b \cdot \frac{qa^3}{6EI} = \frac{qa^3}{EI}\left(\frac{a}{8} + \frac{b}{6}\right)$$

$$\beta_1 = \frac{qa^3}{6EI}$$

   Pour la charge ponctuelle on trouve

$$f_2 = \frac{P(a+b)^3}{3EI}$$

$$\beta_2 = \frac{P(a+b)^2}{2EI}$$

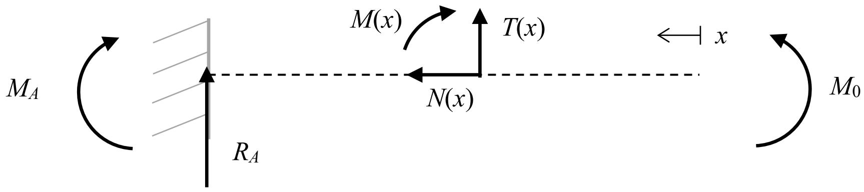
3. D'où, par superposition :

$$f = f_1 + f_2 = \frac{qa^3}{EI}\left(\frac{a}{8} + \frac{b}{6}\right) + \frac{P(a+b)^3}{3EI}$$

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 = \frac{qa^3}{6EI} + \frac{P(a+b)^2}{2EI}$$

Problème 2

1. Schéma



2. Equilibre des forces et moments de force

   Les forces normale et tangentielles sont nulles $T = N = 0$

   Avec le choix des axes défini sur la figure, le moment fléchissant dans la section d'abscisse x s'écrit : $M(x) = -M_0$

3. En introduisant l'expression du moment de force dans l'équation différentielle de la déformée, on obtient

$$y'' - \frac{M(x)}{EI} = \frac{M_0}{EI}$$

$$y' = \frac{M_0}{EI}(x + c_1)$$

$$y = \frac{M_0}{EI}\left(\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2\right)$$

4. Les constantes d'intégration c_1 et c_2 sont déterminées par les conditions aux limites

$$\begin{cases} y(x = \ell) = \frac{M_0}{2EI}(\ell^2 + 2\ell c_1 + 2c_2) = 0 \\ y'(x = \ell) = \frac{M_0}{EI}(\ell + c_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = -\ell \\ c_2 = \ell^2/2 \end{cases}$$

5. Déformée et flèche

   L'équation de la déformée est par conséquent : $y = \dfrac{M_0}{2EI}\left(x^2 - 2\ell x + \ell^2\right)$

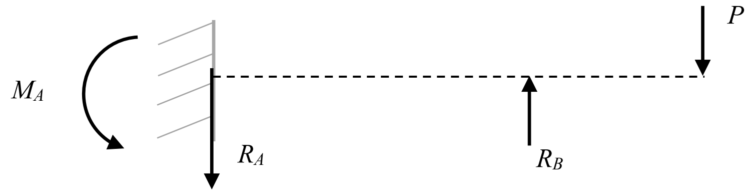
   La flèche apparaît en $x = 0$: $f_{\max} = \dfrac{M_0 \ell^2}{2EI}$

   Cette valeur de $f_{\max}$ est donnée par l'annexe *II*. En ce qui concerne l'équation de la déformée, l'abscisse x définie ci-dessus correspond à l'abscisse *(ℓ-x)* dans l'annexe *II*.

En remplaçant dans l'équation $y = f(x)$ ci-dessus x par ℓ-x et y par $-y$ on doit donc retrouver l'équation donnée par l'annexe *II* : $y = -\frac{M_0}{2EI}\left[(\ell - x)^2 - 2\ell(\ell - x) + \ell^2\right] = -\frac{M_0}{2EI}x^2$

Problème 3

1. Schéma



2. Equilibre des forces et des moments de force (3 inconnues → superposition de cas)

$$\Sigma F = P + R_A - R_B = 0$$

$$\Sigma M = M_A + R_B\ell - P(\ell + \alpha\ell) = 0$$

3. Cas de charge sans R_B : Si l'appui B n'existait pas, l'équation de l'élastique due à la charge *P* serait :

$$y(x) = \frac{P}{6EI}[3(1+\alpha)\ell x^2 - x^3]$$

$$f_{B1} = y(x = \ell) = \frac{P\ell^3}{6EI}(3\alpha + 2)$$

4. Cas de charge sans P :

$$y(x) = \frac{-R_B}{6EI}[3\ell x^2 - x^3]$$

$$f_{B2} = y(x = \ell) = \frac{-R_B\ell^3}{6EI}$$

5. Superposition des cas de charge : la réaction R_B dirigée vers le haut provoque une flèche f_{B2} opposée à f_{B1}, de sorte que le déplacement du point B est nul :

$$f_B = f_{B1} + f_{B2} = 0$$

Et donc

$$R_B = \frac{3\alpha + 2}{2}P$$

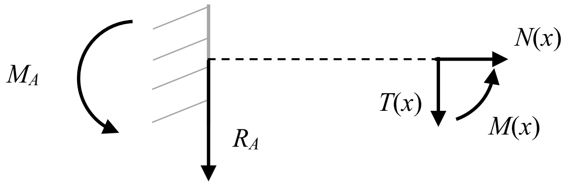
6. Calcul de la flèche en *C* : la flèche en C est la somme algébrique des flèches dues à *P* et R_B agissant séparément.

Action de *P* $f_{C1} = (1+\alpha)^3\frac{P\ell^3}{3EI}$

Action de R_A $f_{C2} = f_{B2} - \beta_{B2}\alpha\ell = -\frac{R_B\ell^3}{3EI} - \frac{R_B\ell^2}{2EI}\alpha\ell$

D'où la flèche en C $f_C = f_{C1} + f_{C2} = (3+4\alpha)\alpha^2\frac{P\ell^3}{12EI}$

7. Calcul des moments de force



Entre $0 \le x \le \ell$

Equilibre des moments de force

$$\Sigma M_x = M(x) + M_A + R_A x = 0$$

Avec R_B connu

$$R_A = R_B - P = \frac{3\alpha}{2}P$$

$$M_A = P(\ell + \alpha\ell) - R_B\ell$$

Et donc

$$M(x) = -\frac{3\alpha}{2}Px + \frac{\alpha\ell}{2}P$$

$$M(x=0) = \frac{\alpha\ell}{2}P \qquad \text{et} \qquad M(x=\ell) = -\alpha\ell P$$

8. Diagramme des efforts

Entre $\ell \le x \le \ell + \alpha\,\ell$: on sait que $M(x)$ est linéaire et que $M(x = \ell + \alpha\,\ell) = 0$